

# SUR LA DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE POTENTIELLE AUTOUR D'UNE PRISE DE TERRE PONCTUELLE DANS UN TERRAIN A COUCHES HORIZONTALES, HOMOGÈNES ET ISOTROPES.

Par S. STEFANESCO en collaboration avec C. et M. SCHLUMBERGER.

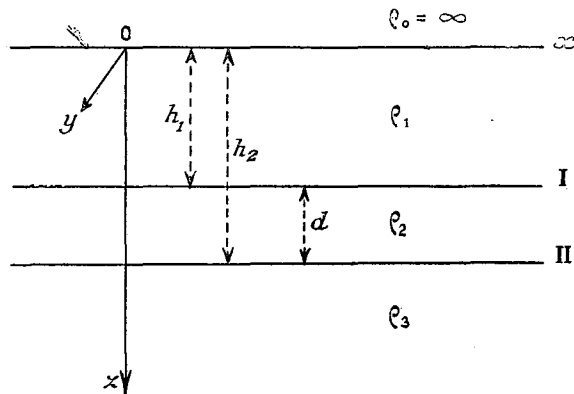
**Sommaire.** — L'objet de cette communication est de résoudre le problème de la répartition des potentiels à l'intérieur de couches de terrain horizontales, homogènes et isotropes, par une méthode basée sur l'emploi généralisé de la fonction de Bessel de première espèce. Il est ainsi possible d'exprimer sous forme d'intégrale définie le potentiel dans chacune de ces couches, quels que soient leur nombre, leur épaisseur et leur résistivité spécifique.

Dans deux articles de la Revue *Zeitschrift für Geophysik*, M. J. N. Hummel<sup>(1)</sup> a examiné et résolu au moyen de la méthode des images de Thomson, le problème de la répartition des potentiels autour d'une prise de terre ponctuelle, lorsque le sol se compose de deux ou trois couches de conductibilités différentes, à surfaces de séparation planes et parallèles. Il a également indiqué la manière dont cette méthode peut être généralisée, au moins en principe, au cas des couches homogènes en nombre quelconque.

Malgré le grand intérêt qui reste attaché à la méthode des réflexions successives, pour toutes les questions de distributions potentielles concernant les semi-conducteurs à surfaces de séparation planes, l'application de cette méthode, ainsi qu'il résulte des travaux de M. Hummel, devient tout-à fait malaisée et se heurte même à des complications de calcul inextricables dès que le nombre des couches devient tant soit peu élevé.

En généralisant un procédé indiqué dans l'ouvrage *Die Erdströme* de M. Ollendorf<sup>(2)</sup>, on est conduit par contre à exprimer sous forme finie, même dans le cas d'un nombre  $n$  de couches, la valeur du potentiel en un point quelconque du sol ou de sa surface. C'est cette méthode que nous allons d'abord exposer en détail pour le cas particulier de trois couches ; nous verrons ensuite comment elle peut être facilement généralisée au cas de quatre et même de  $n$  couches de conductibilités différentes.

**1. Enoncé du problème.** — Considérons trois conducteurs homogènes et isotropes,



dont les résistivités sont respectivement  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  et dont les surfaces de séparation sont des plans parallèles indéfinis. Une électrode ponctuelle placée au point O de la surface de sépa-

<sup>(1)</sup> J. K. HUMMEL : a) Der Scheinbare spezifische Widerstand; *Z. für Geophysik.*, t. 5, p. 89, n° 3 4; b) Der Scheinbare spezifische Widerstand bei vier plan parallelen Schichten. *Z. für Geophysik.*, t. 5, p. 228, n° 5-6.

<sup>(2)</sup> OLLENDORF. *Die Erdströme*, p. 69 et suivantes.

ration du premier conducteur et de l'air ( $\rho_0 = \infty$ ), débite un courant continu d'intensité totale  $I$ .

On recherche la distribution potentielle électrique dans la couche de résistivité  $\rho_1$  et à la surface du sol.

**2. Formulation analytique.** — Soient, complés sur un axe vertical  $oz$ ,  $h_1$  et  $h_2$  les cotes des plans de séparation I (entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ ) et II ( $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ). On pose  $h_2 - h_1 = d$ .

Au point de vue analytique, le problème précédent peut être formulé de la manière suivante :

Trouver trois fonctions potentielles  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , satisfaisant à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

et se raccordant suivant les plans O, I, II au moyen des conditions de passage

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0,$$

$$V_1 = V_2, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = h_1,$$

$$V_2 = V_3, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial V_3}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = h_2.$$

Enfin la fonction  $V_1$  doit être infinie comme  $\frac{I}{2\pi} \frac{1}{R} \rho_1$  (avec  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ) au voisinage du point O et la fonction  $V_3$  doit disparaître comme  $\frac{1}{R}$  aux points infiniment éloignés de O, dans la direction des  $z$  positifs.

**3. Solution du problème au moyen des intégrales de Hankel.** — La distribution potentielle étant de révolution autour de  $oz$ , il y a tout intérêt à passer en coordonnées cylindriques d'axe  $oz$ . La coordonnée angulaire disparaît dans l'équation de Laplace, laquelle ne contient plus que deux variables :  $r$  (rayon) et  $z$  (cote) et s'écrit dès lors :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Si l'on cherche des solutions de cette équation ayant la forme

$$U(r) e^{\pm \lambda z}.$$

on est conduit pour  $U$  à l'équation de Bessel d'ordre 0 :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \lambda^2 U = 0.$$

Les solutions classiques de cette équation sont les fonctions  $J_0(\lambda r)$  et  $Y_0(\lambda r)$  (fonctions de Bessel de première et de seconde espèce), ainsi que toute combinaison linéaire de ces fonctions à coefficients constants.

Nous n'aurons besoin ici que de la fonction de première espèce  $J_0(\lambda r)$ , laquelle fournit pour l'équation de Laplace les solutions à symétrie cylindrique

$$J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} \quad \text{et} \quad J_0(\lambda r) e^{+\lambda z}$$

qui jouent un rôle fondamental pour toutes les questions analogues (présentant une symétrie de révolution autour d'un axe).

Ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, toute combinaison linéaire des fonctions

précédentes est également une solution de l'équation de Laplace. Il en est ainsi en particulier des intégrales

$$\int \theta(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad \int \psi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda$$

prises entre deux limites fixes quelconques (intégrales de Hankel). Par un choix convenable des fonctions  $\theta(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$  on arrive ainsi à exprimer n'importe quel potentiel à symétrie cylindrique au moyen d'une intégrale définie.

En particulier, H. Weber a mis la solution fondamentale  $\frac{1}{R}$  de l'équation de Laplace sous la forme (1) :

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda;$$

la fonction  $\theta(\lambda)$  se réduit dans ce cas à la constante 1.

Revenons maintenant à notre problème et posons :

$$V_1 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left( \frac{1}{R} + \varphi_1 \right), \quad V_2 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left( \frac{1}{R} + \varphi_2 \right),$$

$$V_3 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left( \frac{1}{R} + \varphi_3 \right).$$

On met ainsi en évidence dans l'expression de chacun des potentiels  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , un potentiel *primaire*  $\frac{I}{2\pi} \rho_1 \cdot \frac{1}{R}$  — qui existerait seul si le sol était homogène et avait une conductibilité égale à celle de la couche superficielle — et un potentiel *secondaire* ou *perturbant*  $\varphi$ , dû à la présence des couches  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ .

Nous représenterons ces fonctions au moyen d'intégrales de Hankel en posant :

$$V_1 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \theta_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda \right\}$$

$$V_2 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \theta_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda \right\}$$

$$V_3 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \theta_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty \psi_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda \right\}$$

expressions où les  $\theta(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$  sont des fonctions inconnues de  $\lambda$ .

Essayons de préciser ces fonctions au moyen des conditions aux limites.

4. **Voisinage de l'origine et points à l'infini.** — Au voisinage de l'origine,  $V_1$  a bien la forme d'infini  $\frac{I}{2\pi} \rho_1 \cdot \frac{1}{R}$  à condition toutefois que le champ perturbant reste fini, ce que nous vérifierons après coup.

Dans la direction des  $z$  positifs,  $V_3$  doit disparaître comme  $\frac{1}{R}$ ; l'intégrale

$$\int_0^\infty \psi_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda$$

n'est donc pas utilisable, ses termes devenant infinis; nous poserons donc :

$$\psi_3(\lambda) = 0$$

5. **Conditions aux limites dans le plan  $z = 0$ .** — Les surfaces équipotentielles doivent aboutir normalement à la surface du sol, donc  $\frac{\partial V_1}{\partial z} = 0$ . Le potentiel primaire

(1) Cf. pour les formules de H. WEBER : WEBSTER, *The partial differential equations of math. physics*, § 120.

vérifie évidemment cette relation ; pour le potentiel secondaire on a :

$$\frac{I}{2\pi} \rho_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \int_0^\infty [-\theta_1(\lambda) \cdot \lambda + \psi_1(\lambda) \cdot \lambda] J_0(\lambda r) d\lambda = 0.$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit  $r$ , il faut que

$$\theta_1(\lambda) \equiv \psi_1(\lambda)$$

6. Conditions aux limites dans le plan  $z = h_1$ . — On a :

$$V_1 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \theta_1(\lambda) (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$V_2 = \frac{I}{2\pi} \rho_2 \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \theta_2(\lambda) e^{-\lambda z} + \psi_2(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Pour  $z = h_1$ ,  $V_1 = V_2$ , quel que soit  $r$ ; donc

$$e^{-\lambda h_1} + \theta_1(\lambda) (e^{-\lambda h_1} + e^{\lambda h_1}) = e^{-\lambda h_1} + \theta_2(\lambda) e^{-\lambda h_1} + \psi_2(\lambda) e^{\lambda h_1}. \quad (I)$$

Toujours pour  $z = h_1$ ,  $\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z}$ .

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{I}{2\pi} \cdot \int_0^\infty [-\lambda e^{-\lambda z} + \theta_1(\lambda) (-\lambda e^{-\lambda z} + \lambda e^{\lambda z})] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \int_0^\infty [-\lambda e^{-\lambda z} - \lambda \theta_2(\lambda) e^{-\lambda z} + \lambda \psi_2(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Pour que ces quantités soient égales quel que soit  $r$ , si  $z = h_1$  il faut que :

$$-e^{-\lambda h_1} + \theta_1(\lambda) (-e^{-\lambda h_1} + e^{\lambda h_1}) = \frac{\rho_1}{\rho_2} [-e^{-\lambda h_1} - \theta_2(\lambda) e^{-\lambda h_1} + \psi_2(\lambda) e^{\lambda h_1}]. \quad (II)$$

7. Conditions aux limites dans le plan  $z = h_2$ . — On a

$$V_3 = \frac{I}{2\pi} \rho_3 \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \theta_3(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Pour  $z = h_2$ ,  $V_2 = V_3$  quel que soit  $r$ ; donc

$$e^{-\lambda h_2} + \theta_2(\lambda) e^{-\lambda h_2} + \psi_2(\lambda) e^{\lambda h_2} = e^{-\lambda h_2} + \theta_3(\lambda) e^{-\lambda h_2}. \quad (III)$$

Toujours pour  $z = h_2$ ,  $-\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{\rho_3} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial z}$ .

$\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z}$  a été écrit précédemment.

$$\frac{1}{\rho_3} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial z} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_3} \int_0^\infty [-\lambda e^{-\lambda z} - \lambda \theta_3(\lambda) e^{-\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Egalant ces deux expressions pour  $z = h_2$ , on est amené à écrire :

$$-e^{-\lambda h_2} - \theta_2(\lambda) e^{-\lambda h_2} + \psi_2(\lambda) e^{\lambda h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} [-e^{-\lambda h_2} - \theta_3(\lambda) e^{-\lambda h_2}]. \quad (IV)$$

8. En résumé, les conditions aux limites conduisent à quatre équations linéaires

en  $\theta, \psi$ , qui suffisent à déterminer complètement ces fonctions inconnues; ordonnées, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \theta_1(\lambda)(e^{+\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1}) - \theta_2(\lambda)e^{-\lambda h_1} - \psi_2(\lambda)e^{+\lambda h_1} &= 0 \\ \theta_1(\lambda)(e^{+\lambda h_1} - e^{-\lambda h_1}) + \theta_2(\lambda)\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{-\lambda h_1} - \psi_2(\lambda)\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{+\lambda h_1} &= \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)e^{-\lambda h_1} \\ \theta_2(\lambda)e^{-\lambda h_2} + \psi_2(\lambda)e^{+\lambda h_2} - \theta_3(\lambda)e^{-\lambda h_2} &= 0 \\ -\theta_2(\lambda)e^{-\lambda h_2} + \psi_2(\lambda)e^{+\lambda h_2} + \theta_3(\lambda)\frac{\rho_2}{\rho_3}e^{-\lambda h_2} &= \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-\lambda h_2}. \end{aligned}$$

Nous résoudrons ces quatre équations par la méthode ordinaire des déterminants. Calculons d'abord le dénominateur général.

9. Dénominateur général  $\Delta$ . — On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{+\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1} & -e^{-\lambda h_1} & -e^{+\lambda h_1} & 0 \\ e^{+\lambda h_1} - e^{-\lambda h_1} & \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{-\lambda h_1} & -\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{+\lambda h_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda h_2} & e^{+\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} \\ 0 & -e^{-\lambda h_2} & e^{+\lambda h_2} & \frac{\rho_2}{\rho_3}e^{-\lambda h_2} \end{vmatrix}$$

Au moyen de quelques artifices de calcul, que le lecteur retrouvera facilement lui-même, on arrive à développer le déterminant précédent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta = \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) - \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-2\lambda h_1} \\ + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-2\lambda h_2} - \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-2\lambda h_2}. \end{aligned}$$

10. Numérateur  $N_1$  de  $\theta_1(\lambda)$ .

$$N_1 = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-\lambda h_1} & -e^{+\lambda h_1} & 0 \\ \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)e^{-\lambda h_1} & \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{-\lambda h_1} & -\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{+\lambda h_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda h_2} & e^{+\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} \\ \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & e^{+\lambda h_2} & \frac{\rho_2}{\rho_3}e^{-\lambda h_2} \end{vmatrix}$$

Par développement on arrive à l'expression

$$N_1 = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-2\lambda h_1} + \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)e^{-2\lambda h_2}.$$

11. — Si on introduit des notations analogues celles de Hummel en posant

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = k_1, \quad \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} = k_2$$

on trouve finalement pour  $\theta_1(\lambda)$

$$\theta_1(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_1 k_2 e^{-2\lambda d}}$$

12. — On obtient d'une manière semblable, par la résolution complète du système linéaire, en  $\theta(\lambda)$ ,  $\psi(\lambda)$ , les valeurs des numérateurs de  $\theta_2$ ,  $\psi_2$ ,  $\theta_3$  et par suite les potentiels  $V_2$  et  $V_3$ . Comme ces potentiels ne présentent aucune importance pratique, nous ne les calculerons pas de façon explicite.

13. — En résumé, le potentiel qui s'établit dans la couche  $\rho_1$  est donné par la formule :

$$V_1 = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \frac{1}{R} + \int_0^\infty \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_1 k_2 e^{-2\lambda d}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda \right\}.$$

Pour avoir le potentiel à la surface du sol, il suffit évidemment de faire  $z = 0$  dans la formule précédente. On trouve :

$$(x) \quad V_1(z=0) = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty \theta_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \right\}.$$

14. **Formules de Hummel.** — Pour retrouver la formule de Hummel [*Z. für Geophysik*, (1929), p. 232, Heft 5, 6] nous partirons de l'expression (x) du potentiel à la surface du sol.

Divisons le numérateur de  $\theta_1(\lambda)$  par son dénominateur en ordonnant suivant les puissances croissantes de  $k_2$ .

On vérifie l'identité :

$$\begin{aligned} \theta_1(\lambda) &= \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 (e^{-2\lambda h_2} - k_1 e^{-2\lambda d})} \\ &= \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} + k_2 (1 - k_1^2) \frac{e^{-2\lambda h_2}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^2} \\ &\quad + k_2^2 (1 - k_1^2) (e^{-2\lambda h_2} - k_1 e^{-2\lambda d}) \frac{e^{-2\lambda h_2}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^3} \\ &\quad + k_2^3 (1 - k_1^2) - (e^{-2\lambda h_2} - k_1 e^{-2\lambda d}) \frac{e^{-2\lambda h_2}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^4} + \dots \end{aligned}$$

Développons maintenant suivant les puissances croissantes de  $k_1$  chacun des termes de la formule précédente :

$$a) \quad \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} = k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_1^2 e^{-4\lambda h_1} + k_1^3 e^{-6\lambda h_1} + \dots$$

Par intégration, en vertu de la formule de H. Weber :

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda,$$

chacun des termes précédents donne un terme de la série

$$k_1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h_1)^2}} + k_1^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + (4h_1)^2}} + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{k_1^{n+1}}{\sqrt{r^2 + [2(n+1)h]^2}}.$$

On reconnaît bien le premier terme de la série doublement infinie de M. Hummel.

b) Deuxième terme :

$$k_2 (1 - k_1^2) \frac{e^{-2\lambda h_2}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^2}.$$

Si l'on développe le dénominateur suivant la formule du binôme, le terme précédent s'écrit :

$$k_2(1 - k_1^2) e^{-2\lambda h_2} (1 + 2k_1 e^{-2\lambda h_1} + 3k_1^2 e^{-4\lambda h_1} + \dots) = k_2(1 - k_1^2) e^{-2\lambda h_2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1) k_1^n e^{-2n\lambda h_1}.$$

Par intégration cela conduit au deuxième terme de la formule de M. Hummel :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} k_2(1 - k_1^2) \frac{(n+1) k_1^n}{\sqrt{r^2 + [2h_2 + 2n h_1]^2}}.$$

c) Troisième terme :

$$k_2^2(1 - k_1^2) e^{-4\lambda h_2} \frac{(1 - k_1 e^{2\lambda h_1})}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^3}.$$

Nous écrivons ce terme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} k_2^2(1 - k_1^2) e^{-4\lambda d} \frac{(e^{-4\lambda h_1} - k_1^2 e^{-4\lambda h_1}) + (k_1^2 e^{-4\lambda h_1} - k_1 e^{-2\lambda h_1})}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^3} \\ = k_2^2(1 - k_1^2) e^{-4\lambda d} \left\{ (1 - k_1^2) \frac{e^{-4\lambda h_1}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^3} - \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^2} \right\}. \end{aligned}$$

Développons les dénominateurs suivant la formule du binôme

$$(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^{-3} = 1 + \frac{2 \cdot 3}{2} k_1 e^{-2\lambda h_1} + \frac{3 \cdot 4}{2} k_1^2 e^{-4\lambda h_1} + \dots$$

$$(1 - k_1 e^{-2\lambda h_1})^{-2} = 1 + 2k_1 e^{-2\lambda h_1} + 3k_1^2 e^{-4\lambda h_1} + \dots$$

Portant ces valeurs dans le terme 3, il vient, tous calculs faits :

$$k_2^2(1 - k_1^2) \left\{ (1 - k_1^2) e^{-4\lambda d} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)}{2} k_1^{n-1} e^{-2(n+1)\lambda h_1} - e^{-4\lambda d} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) k_1^{n+1} e^{-2(n+1)\lambda h_1} \right\}.$$

Par intégration, on retrouve bien les deux parties composant le troisième terme de la série Hummel.

En procédant d'une manière analogue à celle indiquée par ces trois exemples, on retrouve ainsi, un à un, tous les termes de la série doublement infinie de M. Hummel.

**15. Résistivité apparente.** — Si dans un terrain homogène et isotrope, limité par une surface plane du côté de l'air, on envoie, au moyen d'une électrode ponctuelle, un courant continu d'intensité totale  $I$ , le potentiel qui s'établit à une distance  $R$  de l'électrode est donné par la formule

$$V = \frac{2\pi}{I} \rho_1 \cdot \frac{1}{R}.$$

On peut, grâce, à cette formule, déterminer la résistivité spécifique d'un tel terrain par des mesures effectuées en surface ; si, en particulier, on arrive à mesurer par un moyen quelconque le gradient radial du potentiel, on déduit de l'égalité précédente :

$$\rho_1 = - \frac{I}{2\pi} \cdot r^2 \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Dans le cas d'un terrain hétérogène, nous appelons le second membre de cette équation la *résistivité apparente* du sous sol ; celle-ci se confond donc avec la résistivité spécifique réelle, lorsque le sol est homogène et isotrope.

La définition que nous venons de donner de la résistivité apparente est très proche de celle proposée par M. Hummel, qui a très bien mis en évidence, dans les deux articles déjà cités de la *Zeitschrift für Geophysik*, le grand intérêt que la détermination pratique de cette quantité présente pour la prospection électrique du sous sol.

Dans le cas de trois couches, en vertu de la formule (x) du potentiel en surface, on a

$$\rho_{\text{app.}} = \rho_1 \left( 1 - 2r^2 \int_0^\infty \theta_1(\lambda) J'_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right)$$

ou encore, si l'on pose

$$\lambda r = u,$$

$$\theta_1(u) = \frac{k_1 e^{-2u \frac{h_1}{r}} + k_2 e^{-2u \frac{h_2}{r}}}{1 - k_1 e^{-2u \frac{h_1}{r}} - k_2 e^{-2u \frac{h_2}{r}} + k_1 k_2 e^{-2u \frac{d}{r}}},$$

$$\rho_{\text{app.}} = \rho_1 \left( 1 - 2 \int_0^\infty \theta_1(u) J'_0(u) u du \right).$$

**16. Cas de quatre couches.** — En procédant d'une manière tout-à-fait semblable à celle indiquée aux paragraphes 4, 5, 6 et 7 on est conduit à un système de six équations en  $\theta_1, \theta_2, \psi_2, \theta_3, \psi_3, \theta_4$ , lequel suffit à déterminer complètement ces quantités et, par suite, les potentiels dans chacune des quatre couches.

En particulier, si l'on désigne par  $h_3$  la cote du plan de séparation entre la troisième et la quatrième couche et si l'on pose

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = k_1, \quad \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} = k_2, \quad \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_4 + \rho_3} = k_3,$$

$$h_2 - h_1 = d_1, \quad h_3 - h_2 = d_2,$$

on trouve, tous calculs faits,

$$\theta_1(\lambda) = \frac{N_1}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda d_1} + k_2 k_3 e^{-2\lambda d_2} + k_3 k_1 e^{-2\lambda(d_1 + d_2)} - N_1},$$

où

$$N_1 = k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_3 e^{-2\lambda h_3} + k_1 k_2 k_3 e^{-2\lambda(h_1 + d_2)}.$$

La fonction  $\theta_1(\lambda)$  détermine complètement le potentiel dans la première couche, ainsi que la résistivité apparente observée à la surface du sol.

**17. Couches peu perturbantes.** — Un cas intéressant et particulièrement simple est celui où les quantités  $k_1, k_2, k_3$  sont assez faibles pour que leurs produits ou leurs puissances soient négligeables par rapport à ces quantités. On a alors

$$\theta_1(\lambda) = k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_3 e^{-2\lambda h_3}$$

et il devient possible d'effectuer complètement, au moyen de la formule de Weber déjà citée, l'intégrale qui figure dans l'expression (x) du potentiel à la surface du sol.

On a par exemple

$$\frac{1}{R_{2h_1}} = \int_0^\infty e^{-2\lambda h_1} J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$R_{2h_1}$ , désignant la distance d'un point de la surface du sol à l'image de l'électrode par rapport au plan  $z = h_1$

La formule (x) se réduit donc à

$$V_{z=0} = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left( \frac{1}{r} + \frac{2k_1}{R_{2h_1}} + \frac{2k_2}{R_{2h_2}} + \frac{2k_3}{R_{2h_3}} \right).$$



Tout se passe comme si aux points images de l'électrode par rapport aux plans  $z = h_1$ ,  $z = h_2$ ,  $z = h_3$  on avait installé des pôles dont les puissances sont respectivement dans les rapports  $2 k_1$ ,  $2 k_2$ ,  $2 k_3$  à la puissance de l'électrode.

Ce théorème se généralise à un nombre quelconque de couches.

**18. Dans le cas de  $n$  couches à conductibilité nettement différentes.** — On est conduit, d'une manière tout-à fait analogue à celle exposée pour  $n = 3$ , à un système linéaire de  $2n - 2$  équations en  $\theta_1, \theta_2, \psi_2, \dots, \theta_{n-1}, \psi_{n-1}, \theta_n$ .

On trouve facilement l'expression de  $\theta_1$ , sous forme de quotient de deux déterminants.

$$\theta_1(\lambda) = \frac{N_1}{\Delta}.$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-\lambda h_1} & -e^{+\lambda h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e^{-\lambda h_1} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_2}\right) & \frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_2} e^{-\lambda h_1} & -\frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_2} e^{\lambda h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda h_2} & e^{\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & -e^{-\lambda h_2} & \dots & 0 \\ e^{-\lambda h_2} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_3}\right) & -e^{-\lambda h_2} & e^{\lambda h_2} & \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_3} e^{-\lambda h_2} & -\frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_3} e^{\lambda h_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda h_3} & e^{\lambda h_3} & \dots & 0 \\ e^{-\lambda h_3} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_3}{\hat{\rho}_4}\right) & 0 & 0 & -e^{-\lambda h_3} & e^{\lambda h_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{-\lambda h_{n-1}} \\ e^{-\lambda h_{n-1}} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_{n-1}}{\hat{\rho}_n}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\hat{\rho}_{n-1}}{\hat{\rho}_n} e^{-\lambda h_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$\Delta$  a la même composition que  $N_1$ , à part la première colonne qui ne comprend que les éléments  $e^{\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1}$ ,  $e^{\lambda h_1} - e^{-\lambda h_1}$  suivis de zéros. Si l'on fait croître  $n$  indéfiniment en même temps que l'épaisseur des couches tend vers 0, on a là, en principe du moins, le moyen de calculer la fonction  $\theta(\lambda)$  et par suite l'influence potentielle en surface pour une résistivité fonction quelconque de la profondeur  $z$ . Ce serait là une méthode d'induction en tout point analogue à celle employée par Fredholm, pour l'étude des équations intégrales à limites fixes.

Nous nous proposons de revenir sur cette question dans un prochain travail, dans lequel nous examinerons également l'effet dû à l'anisotropie horizontale des couches, ainsi que le champ magnétique provoqué par l'écoulement du courant dans le sol.